

## МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ. РАСЧЕТ ЭХОСИГНАЛОВ В АНИЗОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛАХ, СТРУКТУРНЫЙ ШУМ

© 2018 г. Е.Г. Базулин<sup>1,\*</sup>, Д.А. Коновалов<sup>2</sup>, М.С. Садыков<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ООО «Научно-производственный центр «ЭХО+»,

123458 Москва, ул. Твардовского, 8, Технопарк «Строгино»

<sup>2</sup>Московский энергетический институт (Национальный исследовательский университет),

111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14

\*E-mail: bazulin@echoplus.ru

Поступила в редакцию 26.10.2017

Для разработки методик ультразвукового контроля таких сложных объектов как композитные швы, для расчета эхосигналов в численных экспериментах можно использовать метод конечных разностей во временной области (КРВО). Так как метод КРВО основан на явном численном решении волнового уравнения для упругой среды, то с его помощью учитываются такие эффекты как возникновение волны обегания на объемном отражателе, эффекты трансформации продольной волны в боковую волну при рассеянии ультразвука на трещине, перераспределение импульсов между отражателями и границами объекта контроля. Обосновано применение метода КРВО для моделирования распространения ультразвука в образце с высоким структурным шумом и в образцах из анизотропных неоднородных материалов. Расчет прямой задачи распространения упругих колебаний в твердом теле методом КРВО может оказаться полезным для решения коэффициентной обратной задачи ультразвукового неразрушающего контроля.

*Ключевые слова:* ультразвуковой контроль, антенная решетка, двойное сканирование, Full Matrix Capture (FMC), Total Focusing Method (TFM), Finite Difference Time Domain (FDTD), метод конечных разностей во временной области (КРВО).

### ВВЕДЕНИЕ

В первой части статьи [1] была продемонстрирована эффективность применения метода конечных разностей во временной области для расчета полей при рассеянии ультразвуковых импульсов на несплошностях в однородном изотропном теле. Однако существуют объекты контроля, например, композитные сварные соединения, состоящие из нескольких областей с разными акустическими свойствами, одна из которых может обладать анизотропными неоднородными свойствами. Так, в сварном соединении угол поворота  $\theta(\mathbf{r})$  анизотропных кристаллитов, где  $\mathbf{r} = (x, z)$ , может меняться от точки к точке. Изображения отражателей в композитных сварных соединениях обычно восстанавливают когерентными методами семейства SAFT в предположении, что упругие колебания распространяются в изотропной однородной среде [2, 3]. Такое допущение во многих случаях не позволяет получать изображения, по которым можно уверенно оценить тип обнаруженного отражателя, его размеры и координаты. Поэтому в настоящее время разрабатываются методы для получения высококачественных изображений отражателей в композитных швах [4—8]. Расчет эхосигналов методом КРВО для таких объектов контроля поможет тестировать программы визуализации отражателей.

Хорошо известна в ультразвуковом контроле проблема уменьшения уровня структурного шума, который возникает при многократном перерасеивании импульсов на границах кристаллитов [9]. Метод КРВО может оказаться полезен для проведения численных экспериментов при разработке алгоритмов уменьшения уровня структурного шума [10].

Следует упомянуть работы [11—13], в которых для скалярного волнового уравнения предложен очень перспективный вариант решения коэффициентной обратной задачи методом наименьших квадратов, позволяющий восстанавливать распределение скорости звука и коэффициента затухания в объекте контроля. Расширение предложенного подхода со скалярного варианта волнового уравнения на векторный, позволит учесть возникновение импульса обегания, эффект многократного перерасеивания с трансформацией типов волн на отражателях и на границах объекта контроля.

Так как принцип работы метода КРВО был достаточно подробно рассмотрен в первой части статьи [1], то можно сразу перейти к примерам расчета эхосигналов методом КРВО в неоднородном анизотропном материале и в материале со структурным шумом.

## 1. РАСЧЕТ ПОЛЯ В НЕОДНОРОДНОМ АНИЗОТРОПНОМ ШВЕ

В практике ультразвукового контроля встречаются композитные сварные соединения, состоящие из нескольких областей с разными акустическими свойствами. Причем и само сварное соединение может состоять из неоднородного анизотропного материала. Неоднородность материала сварного соединения может создаваться как меняющимися от точки к точке  $\mathbf{r} = (x, z)$  сварного соединения коэффициентами упругости и плотностью, так и углом поворота  $\theta(\mathbf{r})$  кристаллитов. Для параметрического задания угла поворота кристаллических осей часто используют параметрическую модель MINA [14—15]. Интуитивно представить траектории распространения волн в такой среде весьма непросто, и поэтому метод КРВО может оказаться весьма полезным для моделирования распространения упругих колебаний в композитных швах.

Рассмотрим пример расчета поля в анизотропном неоднородном сварном соединении. Будем полагать, что антенная решетка состоит из 16 элементов размерами 0,7 мм и зазором между элементами 0,3 мм, установлена на рексолитовую призму с углом наклона 25,0 град, стрелой 25 мм и расстоянием пробега по призме 5 мм. Координата передней грани призмы равна 20,0 мм. Образец толщиной 30 мм с моделью сварного соединения состоит из трех областей (см. далее на рис. 2). Материал областей 1 и 3 (слева и справа от шва) полагался однородным изотропным с упругими константами, равными  $C_{11} = C_{22} = \lambda + 2\mu$ ,  $C_{12} = C_{21} = \lambda$  и  $C_{66} = \mu$ , где  $(\lambda = 109, \mu = 83) \times 10^9$  Н/м<sup>2</sup>, и плотностью  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. Область 2 (сварное соединение) заполнена неоднородным анизотропным материалом с кубической симметрией ( $C_{11} = 216, C_{12} = 145, C_{66} = 129) \times 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho = 7900$  кг/м<sup>3</sup>), в которой поворот кристаллических осей описывался параметрической моделью MINA.

На рис. 1а приведены графики фазовых медленностей  $\mathbf{s}^{(l)}$ ( $\beta$ ) для продольной волны (линия зеленого цвета) и для поперечной волны  $\mathbf{s}^{(sv)}$ ( $\beta$ ) с вертикальной поляризацией (линия красного цвета) для  $\theta = 0$ . График  $\mathbf{s}^{(sh)}$ ( $\beta$ ) поперечной волны горизонтальной поляризации показан линией синего цвета. На рис. 1б приведено растровое изображение упругой константы  $C_{11}(x, z)$  для заданного распределения  $\theta(x, z)$  для несимметричной модели MINA. На этом же рисунке для некоторых точек стрелками белого цвета показаны направления кристаллических осей. Расчеты эхосигналов проводили на временном интервале от 0,0 до 6,0 мкс. Шаги дискретизации по пространству были равны  $0,025 \times 0,025$  мм, по времени — 1 нс, а точность расчета производных, согласно обозначению в [1], была  $[2 \times 2, 4]$ .

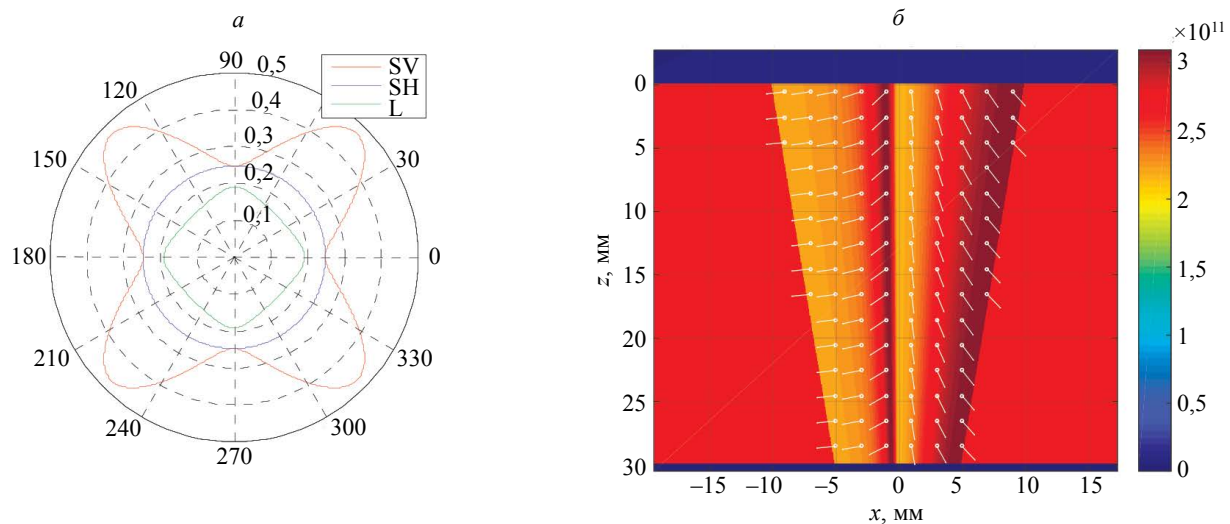


Рис. 1. График фазовых медленностей материала образца с сильной анизотропией (а) и растровое изображение упругой константы  $C_{11}(x, z)$  и схематическое изображение осей кристаллитов (б).

На рис. 2 показаны результаты расчета методом КРВО объемного сжатия  $(\sigma_{11} + \sigma_{22})/2$  и лучи, построенные методом трассировки [8], при подаче зондирующего сигнала на седьмой элемент антенной решетки. Поле продольной волны, рассчитанное методом КРВО, в каждой точке пространственной сетки представлено в виде максимального значения модуля поля на всей временной апертуре. Линиями зеленого цвета показаны лучи, рассчитанные методом трассировки [8], при их

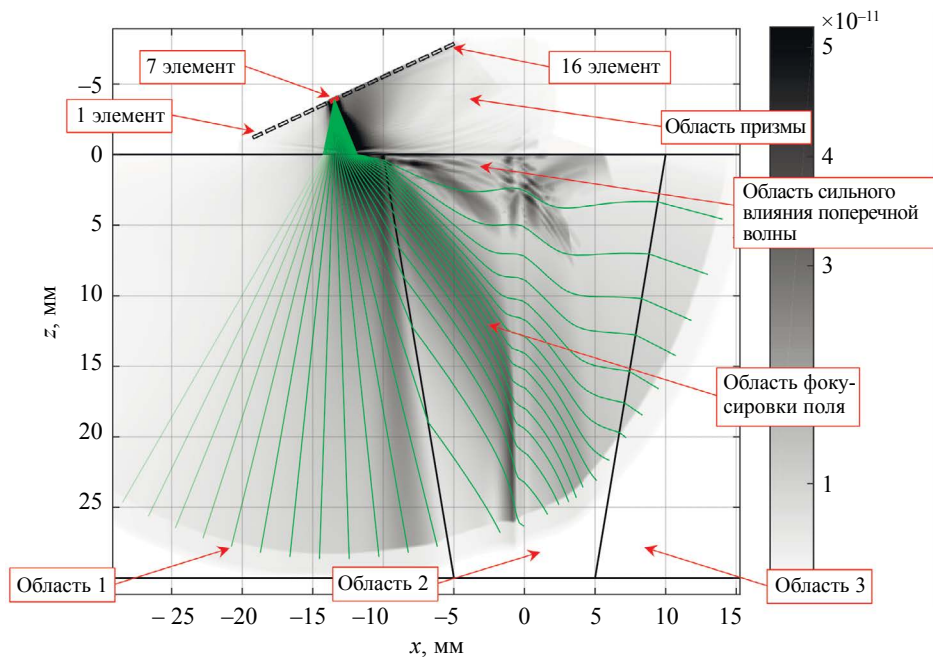


Рис. 2. Результаты расчета методом КРВО объемного сжатия и лучи продольной волны, построенные методом трассировки, при подаче зондирующего сигнала на седьмой элемент антенной решетки.

излучении в диапазоне от  $-40$  до  $85$  град с шагом  $4$  град. Видно, что лучи более плотно расположены в области, где поле, рассчитанное методом КРВО, имеет большую амплитуду, которая кодируется цветом: при уменьшении амплитуды импульса цвет луча стремится к белому, и чем насыщеннее зеленый цвет, тем больше амплитуда импульса. Хорошее совпадение результатов расчета поля методами КРВО и трассировки можно рассматривать как свидетельство правильной работы их программной реализации.

## 2. РАСЧЕТ ПОЛЯ В СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНОМ МАТЕРИАЛЕ

Расчет поля в материалах с многократным рассеянием с изменением типа волны на структурных неоднородностях представляет большой интерес при изучении структурного шума. При таких расчетах часто предполагают, что материал разбит на множество областей, сформированные по принципу построения диаграмм Вороного [16], который используется для описания процесса кристаллизации. Моделирование рассеяния ультразвуковых импульсов в таких материалах эффективнее проводить методом КРВО, а не методом лучевых трубок, так как размеры кристаллитов могут быть соизмеримы или меньше длины волны ультразвукового импульса. Чтобы убедиться в эффективности метода КРВО при расчете упругих волн в структурных материалах, нужно либо сравнить рассчитанные экосигналы с экспериментальными, либо сравнить с теорией, предсказывающей уровень структурного шума в зависимости от свойств материала, размера зерна и частоты зондирующего импульса.

### 2.1. Сравнение результатов расчета уровня структурного шума методом КРВО с теорией

В [17] приведены формулы амплитуды импульсов структурного шума от размеров зерна и частоты зондирующего импульса. Однако данная теория предсказывает, что при размерах зерна больше длины волны уровень шума резко стремится к нулю, что находится в противоречии с экспериментом. Поэтому для сравнения была выбрана, так называемая, модель Роуза (Rose), устанавливающая зависимость коэффициента обратного рассеяния  $\eta$  от среднего размера зерна  $a$  [18] в поликристаллическом материале со случайным углом наклона кристаллических осей  $\theta(\mathbf{r})$ . Под коэффициентом  $\eta(a)$  подразумевается акустическая мощность обратного рассеяния на единицу объема. Обе упомянутые теории предсказывают, что максимальный уровень структурного шума достигается при размерах зерна в диапазоне от  $0,3$  до  $0,4$  от длины волны.

Модель Роуза для анизотропных материалов с кубической симметрией (упругие константы  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  и  $C_{66}$  независимы) описывается следующим выражением:

$$\eta(a) = \frac{Q}{C_{11.0}^2} \frac{k^4 \langle a^6 \rangle}{2\pi(1 + (2ka)^2)^2 \langle a^3 \rangle}, \quad (1)$$

$$Q = \frac{16u^2}{525}, \quad C_{11.0} = \frac{(11C_{11} + 4C_{12} + 8C_{66})}{15}, \quad u = C_{11} - C_{12} - 2C_{66},$$

где  $k$  — волновое число,  $u$  — характеризует степень упругой анизотропии материала. Для сравнения коэффициента обратного рассеяния  $\sqrt{\eta(a)}$ , рассчитанного по формуле (1), с амплитудой эхосигналов  $\hat{s}_{exp}(a)$ , полученной в численном эксперименте, воспользуемся методикой, изложенной в [19]. На первом этапе расчета формируется поликристаллический образец с использованием принципа построения диаграмм Вороного со случайным значением угла  $\theta(\mathbf{r})$  в каждом кристаллите. При расчете методом КРВО волны левого и правого краев образца, отраженные от дна, подавлялись с помощью маски  $M(x_1, x_2)$  так, как описано в первой части статьи [1]. Шаги дискретизации по пространству были равны  $0,025 \times 0,025$  мм, по времени — 1,0 нс, а точность расчета производных была  $[4 \times 4, 4]$ .

На рис 3а для примера показана структура образца со средним размером зерна  $a = 0,5$  мм. На втором этапе методом КРВО рассчитывается поле в образце при излучении зондирующего импульса, форма которого приведена в [1] в виде пластины шириной 10 мм, которая на рис. 3б показана прямоугольником с границей черного цвета. Здесь же приведено распределение  $\sigma_{zz}$  при рассеянии на границах кристаллитов в момент времени 7,2 мкс. И, наконец, эхосигналы структурного шума, принятые той же пластиной, обрабатываются для построения расчетной кривой оценки амплитуды эхосигналов  $\hat{s}_{КРВО}(a)$  структурного шума. Для каждого значения зерна расчеты повторялись для разных вариантов генерации кристаллитов не менее семи раз с целью усреднения полученных оценок  $\hat{s}_{КРВО}(a)$ .

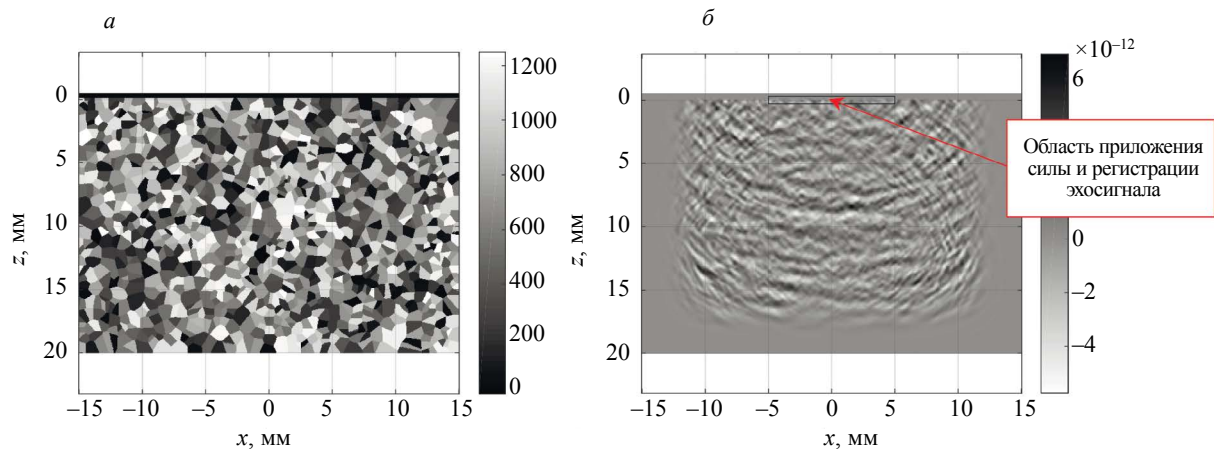


Рис. 3. Структура образца со средними размерами зерна  $a = 0,5$  мм (а), распределение  $\sigma_{zz}$  при рассеянии на границах кристаллитов в момент времени 7,2 мкс (б).

На рис. 4 для частот 1,25, 2,5 и 5,0 МГц приведены графики коэффициента обратного рассеяния  $\sqrt{\eta(a)}$ , рассчитанные по формуле (1), и  $\hat{s}_{КРВО}(a)$ , полученные по методике, описанной выше. В целом совпадение графиков  $\sqrt{\eta(a)}$  и  $\hat{s}_{КРВО}(a)$  можно считать удовлетворительным. Результаты экспериментальных измерений  $\hat{s}_{exp}(a)$  и теоретического расчета  $\sqrt{\eta(a)}$ , приведенные в [19], показывают подобную степень расхождения. Как предсказывает теория, максимальный уровень структурного шума достигается при размерах зерна в диапазоне от 0,3 до 0,4 от длины волны. Таким образом, метод КРВО можно использовать для расчета эхосигналов структурного шума объекта контроля, области которого сформированы по принципу построения диаграмм Вороного.

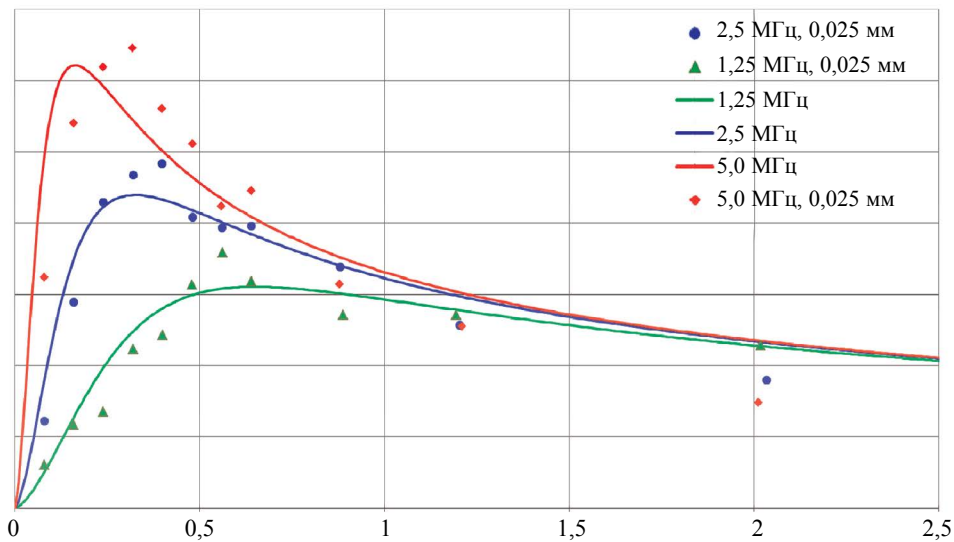


Рис. 4. Зависимость коэффициента обратного рассеяния  $\sqrt{\eta(a)}$  и  $\delta_{\text{КРВО}}(a)$  от размеров зерна  $a$  для частот 1,25, 2,5 и 5,0 МГц.

## 2.2. Пример расчета эхосигналов в структурном материале

Рассмотрим пример расчета поля, рассеянного отражателем бокового сверления в образце, без и со структурным шумом. Отверстие бокового сверления диаметром 1,0 мм с акустически мягкой границей было расположено на глубине 8 мм по центру образца толщиной 9,5 мм. Антенная решетка, состоящая из 32 элементов размерами 0,6 мм и зазором 0,1 мм, размещена на поверхности по центру образца. Возбуждающая сила  $\mathbf{f} = (f_1 = 0, f_2)$  была ориентирована вдоль оси  $z$ . Шаги дискретизации по пространству равны  $0,025 \times 0,025$  мм, по времени — 1 нс, а точность расчета производных составила  $[2 \times 2, 4]$ .

На рис. 5а приведены эхосигналы  $p_{rr}(t)$  в растровом виде для семнадцатого выстрела, а на 5б показан эхосигнал номер 11 семнадцатого выстрела ( $t = 17, r = 11$ ) при распространении ультразвука в образце из однородной изотропной стали. Очень хорошо видны эхосигналы от дна и от поверхности отверстия бокового сверления. На эхосигнале видны импульсы, сформированные рэлеевской и головной волнами, распространяющиеся вдоль антенной решетки, форма которых существенно отличается от эхосигналов.

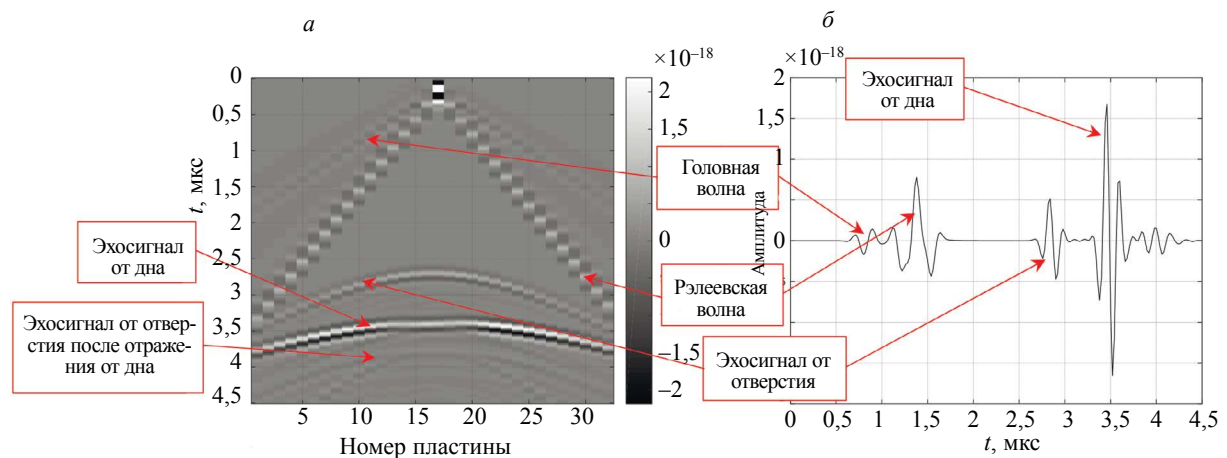


Рис. 5. Эхосигналы семнадцатого выстрела, рассчитанные для однородного изотропного объекта (а), и 11 эхосигнал семнадцатого выстрела (б).

На рис 6а изображены эхосигналы  $p_{rr}(t)$  в растровом виде для семнадцатого выстрела, а на рис. 6б показан эхосигнал номер 11 семнадцатого выстрела при распространении ультразвука



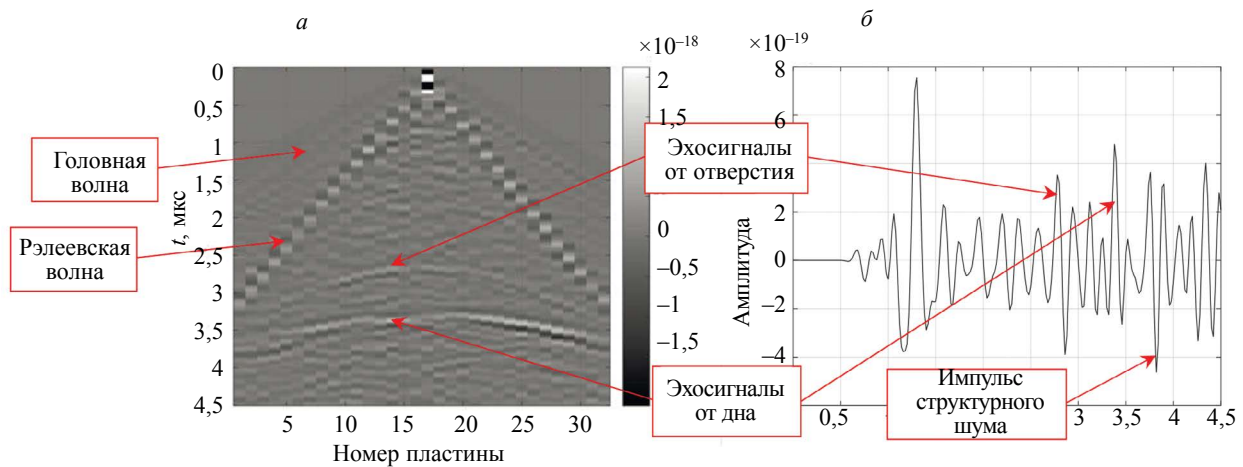


Рис. 6. Эхосигналы семнадцатого выстрела, рассчитанные для объекта со структурным шумом (а), и 11 эхосигнал семнадцатого выстрела (б).

в образце из анизотропного материала ( $(C_{11} = 243, C_{12} = 138, C_{66} = 123) \times 10^9 \text{ Н/м}^2, \rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ) с областями, сформированными по принципу построения диаграмм Вороного со средним размером зерна 0,2 мм. В отличие от эхосигналов на рис. 5 обнаружить эхосигналы от дна и от границы отверстия довольно сложно из-за наличия структурного шума соразмерной амплитуды.

### 3. ПРОБЛЕМА УСКОРЕНИЯ РАБОТЫ АЛГОРИТМА

Метод КРВО алгоритмически очень прост, но для устойчивости явного численного решения шаги сетки по пространству и времени должны удовлетворять условию Куранта — Фридрихса — Леви [20]. При расчетах в стальных образцах на частоте излучения 5 МГц шаг расчетной сетки по времени должен быть меньше 1 нс, а шаг сетки по пространству — меньше 25 мкм. Это приводит к большим размерам расчетной сетки.

Основная операция метода КРВО — сдвиг массивов, их поэлементное сложение и умножение. Эти операции хорошо распараллеливаются и программная реализация метода КРВО с использованием технологии параллельных расчетов NVIDIA CUDA™ [21] должна ускорить расчет более чем в 100 раз. Подобный подход использовался при создании программы решения уравнений Максвелла для расчета электромагнитных полей при их рассеянии на неоднородностях [22]. Отсутствие сложных операций, типа решения линейных систем алгебраических уравнений больших размеров, характерных для метода конечных элементов, делает метод КРВО очень привлекательным с точки зрения технологий параллельных расчетов.

Существенно повысить скорость расчета поля, рассеянного отражателями, можно за счет следующего приема. Отражатели произвольной формы, находящиеся, например, в неоднородной анизотропной среде, окружаются прямоугольником (область КРВО), размеры которого могут быть на два порядка меньше области, в которой расположены антенные решетки на призмах и сам объект контроля. До границы области КРВО падающее поле рассчитывается методом лучевых трубок, а на ее границе рассчитываются граничные условия для точного расчета рассеянного поля методом КРВО. После этого формируется информация для расчета распространения рассеянного поля до приемника методом лучевых трубок. Такой комбинированный подход расчета поля, рассеянного на отражателях, будет принципиально быстрее, чем расчет поля методом КРВО для всего образца. Подобный прием используется в программе SIVA, но в ней для решения волнового уравнения используется не метод КРВО, а метод конечных элементов.

Отметим недостаток метода КРВО перед методом конечных элементов. Чтобы рассчитать поле, рассеянное на трещине шириной, например, 0,05 мм, нужен шаг равномерной прямоугольной пространственной сетки минимум в четыре раза меньше, то есть 0,0125 мм. Неравномерная сетка, используемая в методе конечных элементов, позволяет увеличить количество узлов сетки только в районе края очень узкой трещины. Это повысит точность расчета без радикального увеличения числа узлов расчетной сетки.

## ВЫВОДЫ

Таким образом, по результатам исследований, изложенных в данной статье, можно сделать следующие выводы:

с помощью метода КРВО можно рассчитывать эхосигналы в образцах с областями из анизотропного неоднородного материала;

формирование областей образца по принципу построения диаграмм Вороного позволяет рассчитывать методом КРВО эхосигналы для моделирования структурного шума;

переход на технологию параллельных расчетов должен повысить скорость расчета поля методом КРВО более чем на два порядка.

Авторы благодарны ведущему научному сотруднику НИВЦ МГУ имени М.В. Ломоносова С.Ю. Романову за замечания и предложения, высказанные в процессе подготовки статьи.

Исследование выполнено в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01065).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Базулин Е.Г., Коновалов Д.А., Садыков М.С.* Метод конечных разностей во временной области. Расчет эхосигналов в однородных изотропных материалах // Дефектоскопия. 2018. № 7. С. 9—18.
2. *Chatillon S., Fidahoussen A., Iakovleva E., Calmon P.* Time of flight inverse matching reconstruction of ultrasonic array data exploiting forwards models // 6th Int'l Workshop. NDT Signal Processing. August 25—27. 2009. London. Ontario. Canada.
3. *Базулин Е.Г., Вопилкин А.Х., Тихонов Д.С.* Повышение достоверности ультразвукового контроля. Часть 1. Определение типа несплошности при проведении ультразвукового контроля антенными решетками // Контроль. Диагностика. 2015. № 8. С. 7—22.
4. *Leger Alain, Deschamps Marc* (Eds.). Ultrasonic Wave Propagation in Non Homogeneous. // Media Series: Springer Proceedings in Physics. 2009. V. 128. X. P. 435. DOI: 10.1007/978-3-540-89105-5.
5. *Connolly G.D.* Modelling of the propagation of ultrasound through austenitic steel welds. UK Research Centre in NDE (RCNDE). Department of Mechanical Engineering Imperial College. London. SW7 2AZ. August 2009. P. 206.
6. *Gardahaut A., Jezzine K., Cassereau D., Leymarie N., Iakovleva E.* Advanced simulation of ultrasonic inspection of welds using Dynamic Ray Tracing // 13th International Symposium on Nondestructive Characterization of Materials (NDCM-XIII). 20—24 May. 2013. Le Mans. France.
7. *Schallert R., Heilmann P., Scholz H., Schubert F., Barth M., Fröhlich M.* Phased Array Techniques for an Optimized Inspection of Dissimilar Welds // DGZfP-Jahrestagung. 2011. URL: <http://www.ndt.net/article/dgzfp2011/papers/mo2a4.pdf> (дата обращения: 01.12.2015).
8. *Базулин Е.Г.* Учет анизотропных свойств сварного соединения при восстановлении изображения отражателей по эхосигналам, измеренным ультразвуковой антенной решеткой // Дефектоскопия. 2017. № 1. С. 11—25.
9. *Качанов В.К., Карташев В.Г., Соколов И.В.* Ультразвуковая помехоустойчивая дефектоскопия. М.: Изд. дом МЭИ, 2007. 280 с.
10. *Базулин Е.Г., Вопилкин А.Х., Тихонов Д.С.* Повышение достоверности ультразвукового контроля. Часть 2. Повышение отношения сигнал/шум // Контроль. Диагностика. 2015. № 9. С. 10—27.
11. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Сержеников С.Ю.* Суперкомпьютерные технологии в задачах проектирования томографических диагностических комплексов. СПб.: Изд-во СПбУ, 2016. 230 с.
12. *Гончарский А.В., Романов С.Ю., Сержеников С.Ю.* Обратные задачи послойной ультразвуковой томографии с данными на цилиндрической поверхности // Вычислительные методы и программирование. Новые вычислительные технологии. 2017. Т. 18. С. 267—276.
13. *Goncharsky A., Seryozhnikov S.* The Architecture of Specialized GPU Clusters Used for Solving the Inverse Problems of 3D Low-Frequency Ultrasonic Tomography. In: V. Voevodin, S. Sobolev (Eds.) Supercomputing. RuSCDays 2017 // Communications in Computer and Information Science. V. 793. Springer. Cham. P. 363—375. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-71255-0\\_29](https://doi.org/10.1007/978-3-319-71255-0_29).
14. *Ogilvy J.A.* Ultrasonics beam profiles and beam propagation in austenitic weld using a theoretical ray tracing model // Ultrasonics. 1986. № 11. P. 337—347.
15. *Prager J., Boehm R., Höhne C.* SAFT-Rekonstruktion für die Querfehlerprüfung in austenitischen Schweißnähten und Mischnähten. URL: <http://www.ndt.net/article/dgzfp-ut-bild-2013/vortrag15.pdf> (дата обращения: 30.09.2017).
16. *Aurenhammer F.* Voronoi diagrams — a survey of a fundamental geometric data structure // ACM Computing Surveys. 1991. V. 23, № 3. P. 345—405.
17. *Муравьев В.В., Муравьева О.В., Байтеряков А.В., Дедов А.И.* Методика определения акустических структурных шумов металла // Интеллектуальные системы в производстве. 2013. № 1. С. 143—148.

18. *Rose J.* Ultrasonic backscattering from polycrystalline aggregates using time-domain linear response theory. In D. O. Thompson & D. E. Chimenti. (Eds). *Review of Progress in Quantitative NDE*. New York: Plen, 1991. V 10. P. 1715—1720.
  19. *Bowyer W.H., Crocker R.L.* Modelling of Attenuation and Scattering of Ultrasound in Polycrystalline Copper // *Norstedts Tryckeri AB*. January 1997. SKI Order Number 95062.
  20. *Курант Р., Фридрихс К.О., Леви Г.* О разностных уравнениях математической физики // *Успехи математических наук*. 1941. №. 8. С. 125—160.
  21. Технология NVIDIA CUDA™. URL: <http://www.nvidia.ru/object/cuda-parallel-computing-ru.html> (дата обращения: 30.09.2017).
  22. Программа расчета электромагнитных полей методом DFDTD. URL: <http://zfdtd.narod.ru/> (дата обращения: 30.09.2017).
-